Klaim 0: Amun n bilangan asli nang habis dibagi 20, barataan kalipatan n kada mungkin marupakan bilangan tawas.

Bukti: Ambil m sabarang kalipatan dari n, lawan misalakan representasi desimalnya m tu . Karana 20 tu pambaginya n, maka 20 tu pambaginya m jua. Nyata amun i asli . Maka, . Karana 20|, akibatnya . Akibatnya, , sama ja lawan . Karana maka dapat disimpulkan , lawan , sama ja lawan . Akibatnya ganap. Karana ada dua digit baurutan di m nang paritasnya sama-sama ganap (, maka m lainan bilangan tawas. Akibatnya, barataan kalipatannya n, amun n habis dibagi 20, lainan bilangan tawas. Tabukti.

Lemma X: Amun ada n+1 bilangan asli babeda, kawa dicari dua di antaranya nang salisihnya habis dibagi lawan n.

Bukti Lemma: Misalakan bilangannya tu . Dari PHP, karana hanya ada n buting kamungkinan dalam mod n, maka ada dua buting bilangan dari bilangan-bilangan tasabut nang sama dalam mod n. Misalkan kadua bilangan ini tu . Maka, , sama ja lawan . Tabukti.

Wahini akan dibuktikan amun n kada habis dibagi 20, ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas.

Bagi jadi 4 kasus:

Kasus 1: . Akibatnya n relatif prima lawan 10.

Itihi n+1 bilangan partama dari barisan , dimana string 69 diulang tarus sabanyak k+1 kali. Nyata amun barataan bilangan tu bilangan tawas. Dari lemma X, kawa didapat dua bilangan babeda lawan dari n+1 bilangan nang partama tadi sahingga . Wlog p>q, akibatnya tu . Misalakan p=q+r+1 lawan j=i-q-1, maka . Karana n relatif prima lawan 10, maka . (69 nya diulang sabanyak r+1 kali) Karana tawas lawan habis dibagi n, maka di kasus ini tabukti ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas.

Kasus 2: , ekivalen lawan . Akibatnya relatif prima lawan 10. Dari kasus 1, ada r sahingga (69 nya diulang r kali). Maka, , dimana string 69 di bilangan tarakhir dulang sabanyak r kali. Nyata amun tu tawas lawan habis dibagi lawan n, maka tabukti amun di kasus ini ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas.

Kasus 3: . Maka, , dimana d ganjil. Nyata amun d relatif prima lawan . Dari definisi n di awal, d juga relatif prima lawan 5.

Klaim 1: Untuk satiap m asli, kawa ditamuakan bilangan tawas nang banyak digitnya ganap lawan habis dibagi

Bukti: Subklaim 1a: Untuk satiap k asli, kawa ditamuakan asli, sahingga bilangan tawas nang bisi 2k digit, lawan .

Bukti subklaim: Untuk k=1, ambil . Nyata amun bilangan ini tawas, lawan . Jadi kawa disimpulkan amun k=1, subklaimnya bujur.

Sakarang misalakan klaimnya bujur amun k=j. Artinya, kawa ditamuakan bilangan tawas nang bisi 2j digit lawan mamanuhi Nyata amun digit tarakhir bilangan tawas nang ini tu ganap. Sakarang, ambil ampat bilangan , dimana (bilangan nang bisi sabanyak 2j+2 digit). Nyata amun kaampatnya adalah bilangan tawas nang bisi 2j+2 digit.

Kawa diitihi amun . Nyata amun ,,,,.Akibatnya, . Analog, kawa diitihi amun tu habis dibagi jua.

Akibatnya, kamungkinan hasil bagi kaampat bilangan ini amun dibagi hanya (karana , maka sisa pambagian kaampat bilangan ini amun dibagi lawan habis dibagi lawan

Pre Lemma:

Bukti: ,ekivalen lawan , ekivalen lawan parnyataan awal. Tabukti.

Bagi jadi ampat kasus:

1. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1
2. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.
3. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.
4. . Maka, . Maka, mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1.

Karana di barataan kasus kawa didapatakan nang mamanuhi subklaim 1a untuk kasus k=j+1, maka kawa disimpulkan amun subklaim 1a bujur amun k=j+1. Maka, badasarkan induksi, subklaim 1a tu bujur untuk barataan k asli. Subklaim 1a tabukti.

Karana subklaim 1a bujur, maka akibatnya untuk satiap m asli, kawa ditamuakan sabuah bilangan tawas x nang bisi 2m digit lawan . => untuk satiap m, ada bilangan tawas x nang banyak digitnya ganap lawan habis dibagi . Klaim tabukti.

Sakarang ambil bilangan tawas nang banyak digitnya ganap lawan habis dibagi . Misalakan . Nyata amun paritas lawan tu kada sama. Definisiakan barisan , lawan itihi d+1 angguta partamanya. Dari definisinya, maka , dimana string bilangan diulang sabanyak k+1 kali. Karana paritas satiap dua digit nang sabalahan kada sama ( tawas, lawan paritas lawan tu kada sama), maka untuk barataan k, tu bilangan tawas. Nyata jua amun , maka .

Dari lemma X, kawa didapat dua bilangan nang babeda lawan dari d+1 bilangan nang partama tadi sahingga . Wlog p>q, akibatnya tu . Misalakan p=q+r+1 lawan j=i-q-1, maka . Karana d relatif prima lawan 10, maka . Karana tawas, habis dibagi d, lawan habis dibagi , maka habis dibagi lawan . Akibatnya, untuk satiap n nang mamanuhi , ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas. Tabukti.

Kasus 4:, maka , dimana d ganjil lawan tidak habis dibagi 5. Nyata amun d relatif prima lawan 2 maupun

Klaim 2: Untuk satiap m asli, kawa ditamuakan bilangan tawas ganjil nang banyak digitnya ganjil lawan habis dibagi

Bukti: Subklaim 2: Untuk satiap k asli, kawa ditamuakan asli, sahingga bilangan tawas ganjil nang bisi 2k+1 digit, lawan .

Bukti subklaim: Untuk k=1, ambil . Nyata amun bilangan ini tawas, lawan . Jadi kawa disimpulkan amun k=1, subklaimnya bujur.

Sakarang misalakan subklaim 2 bujur amun k=j. Artinya, kawa ditamuakan bilangan tawas nang bisi 2j+1 digit lawan mamanuhi . Sakarang, ambil 25 buting bilangan dimana (bilangan nang bisi sabanyak 2j+3 digit), lawan p diambil dari {1,3,5,7,9}, lawan q diambil dari (0,2,4,6,8). Nyata amun barataan bilangan nang dimaksud ini tu bilangan tawas nang bisi 2j+2 digit. Karana . Karana , lawan , maka . Karana , maka sisa pambagian lawan habis dibagi . Akibatnya, sisa pambagian sisa pambagian lawan adalah , dimana .

Akan dibuktiakan amun salah satu dari ka 25 bilangan di atas habis dibagi . Maka, asumsiakan kalimat sabalumnya tu kada bujur, maka kadida dari ka25 bilangan tarsabut nang sisanya nul amun dibagi lawan . Akibatnya, hanya ada maksimum 24 kamungkinan sisa pambagian ka25 bilangan tasabut lawan . Badasarkan PHP, akibatnya ada x,y,z,w sahingga lawan adalah dua bilangan nang kada sama, kaduanya tamasuk dari 25 bilangan nang tapilih sabalumnya, lawan sisa kaduanya sama amun dibagi . Wlog Maka, . Karana 5 relatif prima lawan 2, maka parnyataan tarakhir tu sama ja lawan . Akibatnya, .

Karana lawan kaduanya bilangan dua digit nang babeda, maka salisih kaduanya bilangan satu digit atawa dua digit. Karana salisih kaduanya habis dibagi 25, maka kamungkinan salisihnya adalah 25,50, atau 75. Karana y lawan w kaduanya ganap, maka salisih lawan kada mungkin ganjil. Maka, .

Akibat dari parsamaan tarakhir, . Karana y lawan w marupakan bilangan 1 digit, kada mungkin |y-w|>9. Padahal, satu-satunya kalipatan 10 nang absolutnya kada labih ganal dari 9 tu 0 ja. Maka, |y-w|=0, ekivalen lawan y=w. Akibatnya, x-z=5. Padahal, x lawan z sama-sama ganjil, maka x-z ganap, kuntradiksi. Maka, asumsi awal salah. Akibatnya, dari 25 bilangan dimana p diambil dari {1,3,5,7,9}, lawan q diambil dari {2,4,6,8,0}, kawa diambil f lawan g sahingga habis dibagi lawan . Karana tawas lawan punya 2j+3 digit, maka bisa diambil . Akibatnya, subklaim 2 bujur jua amun k=j+1. Badasarkan induksi, akibatnya subklaim 2 bujur untuk barataan k asli. Tabukti.

Karana subklaim 2 bujur, maka akibatnya untuk satiap m asli, kawa ditamuakan sabuah bilangan tawas x nang bisi 2m+1 (ganjil) digit lawan . => untuk satiap m, ada bilangan tawas x ganjil nang banyak digitnya ganjil lawan habis dibagi . Klaim 2 tabukti.

Sakarang ambil bilangan tawas ganjil nang banyak digitnya ganjil lawan habis dibagi . Misalakan . Nyata amun paritas lawan tu kada sama. Definisiakan barisan , lawan itihi d+1 angguta partamanya. Dari definisi, maka , dimana string bilangan diulang sabanyak k+1 kali, lawan digit 0 muncul sabalum string sabanyak k kali. Karana paritas satiap dua digit nang sabalahan kada sama , maka untuk barataan k, tu bilangan tawas. Nyata jua amun , maka .

Dari lemma X, kawa didapat dua bilangan nang babeda lawan dari d+1 bilangan nang partama tadi sahingga . Wlog p>q, akibatnya tu . Misalakan p=q+r+1 lawan j=i-q-1, maka . Karana d relatif prima lawan 10, maka . Karana tawas, habis dibagi d, lawan habis dibagi , maka habis dibagi lawan . Akibatnya, untuk satiap n nang mamanuhi , ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas. Tabukti.

Karana di kaampat kasus tabukti bahwa ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas, maka tabukti untuk barataan n nang kada habis dibagi 20, ada kalipatan n nang marupakan bilangan tawas.

Jadi, kawa disimpulakan bahwa kadida kalipatan n nang marupakan bilangan tawas amun lawan hanya amun n habis dibagi lawan 20.